Introducción a los Elementos finitos

Matemática Computacional

Christian E. Schaerer

DICODE - Politécnica - UNA

cschaer@pol.una.py

Formulación del Problema $P1$

Problema P1

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) = f(x), \qquad \forall x \in (0,1) \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

donde α y β son constantes reales positivas y $f = f(x)$ es una función regular (integrable).

Necesidad

El método de elementos finitos no es aplicable directamente a la ecuación de nuestro estudio.

Es necesario reformular el problema.

Espacio de prueba

Definimos el espacio de las funciones test.

Definición $\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C_0^\infty(\Omega); v(\partial\Omega) = 0\}$ es denominado espacio de las funciones de prueba con suporte compacto en Ω.

Int por partes

Multiplicando la ecuación $P1$ por v se obtiene:

$$\int_0^1 \left(-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) - f(x)\right) v dx = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{3}$$

Integrando por partes la primera integral tenemos

$$\int_0^1 \left(-\alpha u_{xx}(x)\right) v dx = -\alpha (u_x\, v)|_0^1 + \alpha \int_0^1 u_x v_x dx = \alpha \int_0^1 u_x v_x dx \tag{4}$$

ya que $v(0) = v(1) = 0$ (recuerde que v tienen suporte compacto en Ω).

Formulación débil

Substituyendo la integral por artes en la ecuación tenemos:

$$\alpha \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 \beta u(x)\, v dx = \int_0^1 f(x)\, v dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (5)$$

Importante. Note que $u \in V$ y $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Este método consiste en aproximar el espacio de las funciones de las soluciones por un espacio de dimension finita.

Para eso definimos un espacio V_m dando los elementos de la base:

$$V_m = span[\phi_1, ..., \phi_m]$$

donde $\{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ es una base para V (ya adelanto para ustedes que este espacio V sera el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Buscamos la solución aproximada $u^h = u^h(x)$ en el subespacio V_m.

Notación simplificadora

Dada la ecuación:

$$\alpha \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 \beta u(x)\, v dx = \int_0^1 f(x)\, v dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{6}$$

Defino $a(u,v) := \alpha \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 \beta u(x)\, v dx$ y $(f,v) := \int_0^1 f(x)\, v dx$, consecuentemente obtengo:

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{7}$$

Note además que consideraremos el caso que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en V luego, puedo escribir:

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall u, v \in V \tag{8}$$

NUEVO PROBLEMA

Determinar $u = u(x) \in V$ satisfaciendo

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V \tag{9}$$

Observación. Note además que bajo condiciones de regularidad el problema de arriba es equivalente a

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) = f(x), \qquad \forall x \in (0, 1) \tag{10}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{11}$$

PROBLEMA DISCRETO

Determinar $u^h = u^h(x) \in V$ del problema

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{12}$$

en el subespacio V_m. Obtenemos el problema aproximado:

$$a(u^h,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V_m \tag{13}$$

donde por construcción:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \phi_j(x), \qquad \phi_j \in V_m \tag{14}$$

es una solución aproximada de $u = u(x)$

Cual es el problema?

El problema para determinar u^h es determinar los coeficientes C_j ya que con los coeficientes la solución siempre será:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \phi_j(x), \qquad \phi_j \in V_m \tag{15}$$

Substituyendo u^h en la ecuación $a(u^h, v) = (f, v)$ obtenemos:

$$a\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \phi_j(x), v\right) = (f, v) \qquad v \in V_m \tag{16}$$

Arreglando las cosas

Como $v \in V_m$ podemos en particular tomar $v = \phi_i$; entonces:

Substituyendo u^h en la ecuación $a(u^h, v) = (f, v)$ obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j a\left(\phi_j(x), \phi_i(x)\right) = \left(f, \phi_i(x)\right) \qquad i = 1, ..., m \qquad (17)$$

Arreglando las cosas

$$\sum_{j=1}^{m} C_j a\left(\phi_i(x), \phi_j(x)\right) = \left(f, \phi_i(x)\right) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{18}$$

Vea que para cada par ϕ_i, ϕ_j la integral $K_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j) \in \mathbb{R}$ es decir es "un numero", luego puede ser arreglado como una matriz K.

Note que

$$K_{ij} = \alpha \int_0^1 (\phi_i)_x (\phi_j)_x dx + \int_0^1 \beta(\phi_i)(\phi_j) dx = a(\phi_i, \phi_j) \tag{19}$$

Esta matriz se llama matriz de rigidez.

Arreglando las cosas

Además,

$$F_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \tag{20}$$

Sistema $KC = F$

Como los K_{ij} forman una matriz y los F_i un vector, es natural pensar que los C_j forman un vector.

C_j es el vetor incógnitas cuyos componentes corresponden a los coeficientes de

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \phi_j(x), \qquad \phi_j \in V_m \tag{21}$$

Tenemos así el sistema:

$$KC = F \tag{22}$$

Simetria de K

Las propriedades de la matriz K determinan las propriedades del sistema $KC = F$.

Vemos que:

1. K es simétrica. De hecho

$$K_{ij} = \alpha \int_0^1 (\phi_i)_x(\phi_j)_x dx + \int_0^1 \beta(\phi_i)(\phi_j) dx \tag{23}$$

$$= \alpha \int_0^1 (\phi_j)_x(\phi_i)_x dx + \int_0^1 \beta(\phi_j)(\phi_i) dx \tag{24}$$

$$= K_{ji} \tag{25}$$

K es definida positiva definida

Sea $d = (d_1, ..., d_m)$. Entonces,

$$d^T K d = \sum_{i,j=1}^{m} d_i K_{i,j} d_j = \sum_{i,j=1}^{m} d_i a(\phi_i, \phi_j) d_j \tag{26}$$

$$= a\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\phi_i, \sum_{j=1}^{m} d_j\phi_j\right) \tag{27}$$

$$= a(v, v) > 0 \tag{28}$$

ya que si $\alpha, \beta > 0$ entonces
$a(v, v) = \alpha \int_0^1 (\phi_i)_x(\phi_i)_x dx + \int_0^1 \beta(\phi_i)(\phi_i)dx > 0.$

Resumen

Hasta aqui hicimos:

1. La formulación débil.
2. El sistema $KC = F$

FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN

Es necesario explicitar la función ϕ_i, que son los elementos (vectores) de la base que determinan V_m.

El objetivo principal es elegir una base que reditúe en una matriz que tenga muchos ceros.

Las funciones que escogemos ahora son funciones lineales por partes,que cumplan la condición:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si\, i = j \\ 0 & else \end{cases} \tag{29}$$

$x_j \in [0, 1]$ es denominado punto nodal o simplemente *nodo*.

FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN

Desarrollar aqui en el cuadro blanco.

Matriz de rigidez en esta base

Usando las ϕ_i definidas en el cuadro blanco! ... vemos que K_{ii} esta dado por:

$$K_{ii} = \alpha \int_0^1 \left((\phi_i)_x\right)^2 dx + \int_0^1 \beta(\phi_i)^2 dx \tag{30}$$

$$= \alpha \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left((\phi_i)_x\right)^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \beta(\phi_i)^2 dx \tag{31}$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha \left((\phi_i)_x\right)^2 + \beta(\phi_i)^2 dx \ldots \tag{32}$$

$$\ldots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha \left((\phi_i)_x\right)^2 + \beta(\phi_i)^2 dx \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Calculando cada una de las integrales tenemos

Usando las ϕ_i definidas en el cuadro blanco! ... vemos que K_{ii} esta dado por:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha\left((\phi_i)_x\right)^2 + \beta(\phi_i)^2 dx \quad = \quad \alpha 1/h + \beta h/3 \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

Analogamente para el segundo termino. Luego

$$K_{ii} = \alpha\frac{2}{h} + \beta\frac{2h}{3} \tag{37}$$

Calculando $K_{i,i+1}$

$$
\begin{aligned}
K_{i,i+1} &= \alpha \int_0^1 (\phi_i)_x (\phi_{i+1})_x dx + \int_0^1 \beta(\phi_i)(\phi_{i+1}) dx && (38) \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i)_x (\phi_{i+1})_x dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta(\phi_i)(\phi_{i+1}) dx \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h}\frac{1}{h} dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1}-x}{h}\frac{x-x_i}{h} dx \\
&= -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6} && (39)
\end{aligned}
$$

K Tridiagonal

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Donde:

$$K_{ii} = \alpha\frac{2}{h} + \beta\frac{2h}{3} \tag{41}$$

y además,

$$K_{i,i+1} = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta\, h}{6} = K_{i-1,i} \tag{42}$$

Integración de F_i

$$
\begin{aligned}
F_i &= \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx && (43)\\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx && (44)\\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\phi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx && (45)\\
& && (46)
\end{aligned}
$$

Para este caso una forma seria considerar f constante por parte.

Integración de F_i, en el espacio V_m

Mostrar en el cuadro.

2da parte

TEORIA

Comenzamos la parte teórica: Forma bilineal.

Definición. La forma $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, o sea, la función numérica a definida en $V \times V$ es bilineal en V, se es lineal en cada una de las variables.

Continuidad

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es continua en V, se existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in V. \tag{47}$$

Elipticidad = coersividad

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es coersiva en V si existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq C_2 \|v\|^2 \qquad \forall v \in V. \tag{48}$$

Simetria

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica en V si:

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u,v \in V \tag{49}$$

Resumen de $a(\cdot,\cdot)$

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es continua en V, se existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C_1\|u\|\|v\| \qquad \forall u,v \in V. \tag{50}$$

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es coersiva en V si existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq C_2\|v\|^2 \qquad \forall v \in V. \tag{51}$$

Definición. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica en V si:

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u,v \in V \tag{52}$$

Función lineal

Definición. La función lineal $f : V \to \mathbb{R}$ es continua si existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$|\langle f, v\rangle| \leq C_3\|v\| \qquad \forall v \in V. \tag{53}$$

Se dice que f es un elemento del dual de V. El dual es representado por V' o V^{star}.

Pregunta que es V?

Definición. La suceción $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pertenecente a $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todas las funciones (ϕ_j) de la sucesión poseen suportes compactos en Ω.
2. La sucesión (ϕ_j)y todas sus derivadas convergen uniformemente para zero en Ω.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido de la noción de convergencia de arriba, es llamado de funciones de prueba, y es representado por: $\mathcal{D}(\Omega)$

Distribuciones

Definición. Se denomina distribución sobre Ω a toda forma bilineal T, continua en $\mathcal{D}(\Omega)$, o sea una distribución es un funcional

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \tag{54}$$

que satisface las condiciones:

1. $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
2. T es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, si (ϕ_n) converge para cero en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $T(\phi_n)$ converge para cero en $\mathbb{R}$.

El espacio de las distribuciones con la noción de convergencia es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

el producto interno es una distribución

Note que el las funciones localmente integrables $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definen unívocamente una distribución dada por:

$$\langle T_u, \phi\rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx = \langle u, \phi\rangle \tag{55}$$

Note que $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

El espacio de las distribuciones con la noción de convergencia es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Derivada en el sentido de las distribuciones

Para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, definimos la derivada de orden α de u en el sentido de las distribuciones como sigue:

$$\langle \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle u, \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} \rangle \qquad \phi \in \mathcal{D}'(\Omega) \tag{56}$$

Note que en este caso toda distribución es infinitamente derivable, pues $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Espacios de Sobolev

Ahora sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio $L^2(\Omega)$ por (pivot):

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\} \tag{57}$$

Definición. El espacio $H^m(\Omega)$, $m = 0, 1, .. \in \mathbb{N}$ es definido por:

$$H^m(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in L^2(\Omega), \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \in L^2\right\} \tag{58}$$

Observaciones. EL espacio de Sobolev es Hilbert. $H^0 = L^2$.

Espacios $H^1(\Omega)$

Note que para $m = 1$, tenemos que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2 \right\} \tag{59}$$

Vea que en este caso el producto interno esta definido como:

$$(u, v) = \int_\Omega u\, v\, dx + \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, dx \tag{60}$$

La norma se define como $\|u\|^2_{H^1} = (u, u)$.

El subespacio $H_0^1(\Omega)$

Note que para $m = 1$, tenemos que

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \ sobre \ \partial\Omega\} \tag{61}$$

Observe que nosotros teníamos el problema débil:

Determinar $u = u(x) \in V$ satisfaciendo

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V \tag{62}$$

O equivalentemente:

$$\alpha \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 \beta u(x)\, v dx = \int_0^1 f(x)\, v dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{63}$$

$a(\cdot,\cdot)$ en H_0^1

Esto quiere decir que

$$a(u,v) = (u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \alpha \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 \beta u(x)\, v dx = \int_0^1 f(x)\, v dx \tag{64}$$

Luego $V = H_0^1(\Omega)$!!!

Formulación variacional Abstracta

El problema entonces de resolver la ecuación $P1$ consiste en deter minar una función $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in V = H_0^1. \tag{65}$$

Teorema de caracterización

Teorema Sea V un espacio lineal, y sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coersiva ($a(v, v) > 0\ \forall v \in V$, $v \neq 0$; y sea f una forma lineal y continua en V ($f : V \to \mathbb{R}$.

Entonces el funcional:

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle \qquad (66)$$

tiene un mínimo en u sobre V si y solamente si:

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V. \qquad (67)$$

Tiene una única solución u.

Prueba del Teorema de caracterización

Demostracin Para $u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$J(u+tv) = \frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - \langle f, u+tv\rangle \quad (68)$$

$$= J(u) + t\,(a(u,v) - \langle f, v\rangle) + \frac{1}{2}t^2 a(v,v) \quad (69)$$

Si u satisface $a(u,v) - \langle f, v\rangle$ entonces con $t = 1$ tendremos que

$$J(u+tv) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \qquad \forall v \in V \quad (70)$$

$$> J(u) \qquad if\, v \notin 0 \quad (71)$$

Luego u es mínimo.

La recíproca dejo para ustedes.

Teorema Fundamental

Teorema *Lax-Milgram*. Sea V un conjunto convexo cerrado en un espacio de Hilbert H y sea $a(\cdot, cdot)$ una forma bilineal, continua y coersiva, y f una forma lineal y continua en V. Entonces el problema variacional abstracto:

$$J(v) := \frac{1}{2}a(u,v) - \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V. \longrightarrow \min! \tag{72}$$

posee una única solución $u \in V$. Además la aplicación es $f \longrightarrow u$ es continua de V' en V.

Resumen

Hasta aqui tenemos:

1. $V = H_0^1$
2. La solución existe y es única.

Observación de Teorema Fundamental

Teorema Note que J es limitado inferiormente ya que:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - \langle f, v\rangle \tag{73}$$

$$\geq \frac{1}{2}\,C_2\|v\|^2 - \|f\|\|v\| \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2\,C_2}\left(C_2\|v\| - C_2\|f\|\right) - \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2 \tag{75}$$

$$\geq -\frac{\|f\|}{2\,C_2} \tag{76}$$

Estabilidad del Método de elementos finitos.

Teorema. Independiente de la elección del espacio $V_m \subset V$, la solución de $a(u_h, v) = \langle f, v\rangle$ satisface:

$$\|u_h\| = C_2^{-1}\|f\| \tag{77}$$

Demostracin. Sea u_h la solución de la forma débil. Substituyendo $v = u_h$ tenemos:

$$C_2\|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) = \langle f, v\rangle \leq \|f\|\|u_h\| \tag{78}$$

Convergencia

Queremos saber si $u_h \to u$.

Consistencia + estabilidad = convergencia

Estabilidad ya demostramos, falta consistencia.

Consistencia

Teorema. Sea $e = u_h - u$ denotando el error de la aproximación del método de el elementos finitos. Entonces:

1. $a(e, v_h) = a(u - u_h, u) = 0$
2. $\|u - u_h\| \leq \delta \|u - v_h\|$

para todo $v_h \in V_h$ donde $\delta = C_1/C_2$

Observación. La primera condición significa que el error es ortogonal al subespacio V_h. La segunda condición significa que la solución u_h obtenida por el método de Galerkin es la mejor aproximación para u respecto a la norma $\|\cdot\|_V$.

Demostración 1)

1) Como $V_h \subset V$ entonces la solución puede ser escrita como:

$$a(u, v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \tag{79}$$

Substrayendo

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \tag{80}$$

Obtenemos:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h \tag{81}$$

Demostración 2)

2) Como $a(\cdot,\cdot)$ es coersivo y lineal tenemos:

$$
\begin{aligned}
C_2\|u-u_h\|^2 &\leq a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-u_h-v_h+v_h) \\
&\leq a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h) && (82)\\
&= a(u-u_h,u-v_h) && (83)
\end{aligned}
$$

ya que $a(u-u_h,v_h-u_h)=0.$ Usando continuidad tenemos:

$$C_2\|u-u_h\|^2 \leq C_1\|u-u_h\|\|u-v_h\| \qquad (84)$$

Análisis: Estrategia

Faltaria saber que ahora queremos estimar el error $\|u_h - u\|$.

Estrategia

Consideramos $\tilde{u}$ la proyección de u sobre V_h. CAlculemos la distancia entre $\tilde{u}$ y u. Finalmente midamos la distancia entre u_h y $\tilde{u}$

Análisis: Estrategia

Teorema. Dada la función $u \in H^r$, $r \geq 0$. Entonces existe una función $\tilde{u} \in V_h^k$ denominada interpolante, tal que para todo s, $0 \leq s \leq \min\{r, m\}$,

$$\|u - \tilde{u}\|_s \leq ch^\gamma \|u\|_r \tag{85}$$

donde $\gamma \leq \min\{k + 1 - s, r - s\}$.

Ejemplo. Si usamos polinomios de primer orden y $u \in H^2(\Omega)$, en estas condiciones:

$$\|u - \tilde{u}\|_1 \leq c\,h\,\|u\|_2 \tag{86}$$

$$\|u - \tilde{u}\|_0 \leq c\,h^2\,\|u\|_2 \tag{87}$$

Ahora si $u \in H^1$ entonces:

$$\|u - \tilde{u}\|_0 \leq c\,h\,\|u\|_1 \tag{88}$$

Análisis: Estrategia

Finalmente $\|u - u_h\| \approx \|u - \tilde{u}\|$?

Note que $v_h = \tilde{u} \in V_h$ entonces:

$$\|u - u_h\|_m \leq \delta \|u - \tilde{u}\|_m \tag{89}$$

Note que por el Teorema de Interpolación tenemos que $\|u - \tilde{u}\|_m \leq ch^\gamma \|u\|_r$

Ejemplo

$$\|u - u_h\|_0 \leq \delta \|u - \tilde{u}\|_0 \leq c\,\delta\, h^2\, \|u\|_2 \tag{90}$$