ALGEBRAIC GEOMETRY – PARAGUAY

Problema 1. *Encuentren la forma escalón reducida de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. *Suponemos que dos matrices, A y B, tienen formas escalón reducidas diferentes.*

a) Podemos concluir que A y B tienen espacios de filas diferentes? Si la respuesta es NO entonces den un ejemplo. Si la respuesta es SÍ entonces expliquen por qué.

b) Podemos concluir que A and B tienen espacios de columnas diferentes? Si la respuesta es NO entonces den un ejemplo. Si la respuesta es SÍ entonces expliquen por qué.

Problema 3. *Sea $H_{\leq 2}(S)$ el número de condiciones impuestas por puntos distinctos $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ al espacio vectorial $R_{\leq 2}$.*

a) Sea $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (a,b)\}$. Demuestren que $H_{\leq 2}(S) = 4$.

b) Sea $S = \{(0,0), (a,0), (b,0), (c,0)\}$. Demuestren que $H_{\leq 2}(S) \neq 4$.

c) Sea S cuatro puntos. Suponen que no es cierto que todos los cuatro estén situados en una recta. Demuestren que hay una transformación afín que mapa los cuatro puntos a $\{(0,0), (1,0), (0,1), (a,b)\}$.

d) Sea S un conjunto de cuatro puntos. Suponemos que todos los cuatro están situados en una recta. Demuestren que hay una transformación afín que mapa los cuatro puntos a $\{(0,0), (a,0), (b,0), (c,0)\}$.

e) Concluyen que $H_{\leq 2}(S) \neq 4$ si y solamente sino hay una recta que contiene todos los cuatro puntos de S.

Problema 4. *a) Demuestren que el número de monomios homogeneos de grado d en las variables $x_0, \ldots, x_n$ es igual al número de monomios de grado $\leq d$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$. (Noten que en el primer caso hay la variable x_0 que no hay en el segundo.)*

b) Cual es la dimensión de R_d si $R = K[x_1, \ldots, x_n]$? Acuérdense que la dimensión es el número de elementos en una base, y en este caso una base existe que consiste en monomios, así que tienen que contar monomios.

Problema 5. *Encuentren un polinomio de grado 2, $f \in \mathbb{R}[x]$, tal que*

$$f(1) = \pi, f(2) = e^2, f(3) = \log(2).$$

Problema 6. *Encuentren un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que*

$$f(0, 0) = f(1, 2) = f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = f_{xy}(1, 2) = 0.$$

Problema 7. *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Sea I el intervalo $I = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1\}$. Por cada de los siguientes, determinen si el conjunto es una variedad algebraica. Si la respuesta es SI entonces den un conjunto de ecuaciones que definen esa variedad. Si la respuesta es NO entonces encuentren la clausura Zariski del conjunto.*

a) Es $\mathbb{Z}$ una variedad algebraica en $\mathbb{R}^1$?

b) Es $\mathbb{Z}$ una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

c) Es I una variedad algebraica en $\mathbb{R}^1$?

d) Es el eje x una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

e) La unión del eje x y el eje y es una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

f) La unión del eje x, el eje y, y el eje z es una variedad algebraica en $\mathbb{R}^3$?

g) Sea

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{la parte imaginaria de } z \text{ es cero}\}.$$

Es D una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

h) Es el círculo de radio 1 una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

i) Es el disco cerrado de radio 1 una variedad en $\mathbb{R}^2$.

j) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Es G una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

Problema 8. *Cuáles son las variedades algebraicas en $\mathbb{R}^1$?*

Problema 9. *Cuáles son las variedades algebraicas en $\mathbb{C}^1$?*

Problema 10. *Describan cada una de las siguientes variedades algebraicas en $\mathbb{R}^3$.*

a) $V(xyz)$

b) $V(xy, xz, yz)$

c) $V(x, y, z)$

d) $V(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$

e) $V(x^2 + y^2 + z^2)$

f) $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Problema 11. *Describan cada una de las siguientes variedades algebraicas en* $\mathbb{R}^2$*.*

a) $V((x^2 + y^2 - 1)(x - y))$

b) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y)$

c) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y + 1)$

d) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y + 3)$

Problema 12. *Sea* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$*.*

a) Encuentren la homogenización, $\bar{f}$*, de* f *usando la variable nueva* z*.*

b) Si $K = \mathbb{R}$*, en cuantos puntos se encuentran la curva* $V(\bar{f})$ *y la recta del infinito? (Recuerden que* $[0, 0, 0]$ *NO es un punto del plano proyectivo, y que la recta del infinito está definida por la ecuación* $z = 0$*.)*

c) Si $K = \mathbb{C}$*, en cuantos puntos se encuentran la curva* $V(\bar{f})$ *y la recta del infinito?*

Problema 13. *Ahora trabajemos en* $\mathbb{P}^3$*. Si la respuesta es NO, entonces expliquen. Si es SÍ, den un ejemplo.*

a) Existen dos rectas V_1, V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*

b) Existen dos planos V_1, V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*

c) Existen una recta V_1 *y un plano* V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*