Hipótesis Simplificatorias

Clase 3

Ley de Hooke e Hipótesis de Navier, Ley de Hooke Generalizada, Procedimiento general de la Mecánica de los sólidos, Problemas Principales, Diferentes casos de Resistencia.

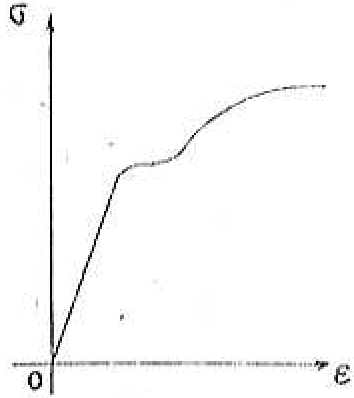
Hipótesis fundamentales de la Resistencia de Materiales

- LEY DE HOOKE

- HIPOTESIS DE NAVIER BERNOULLI

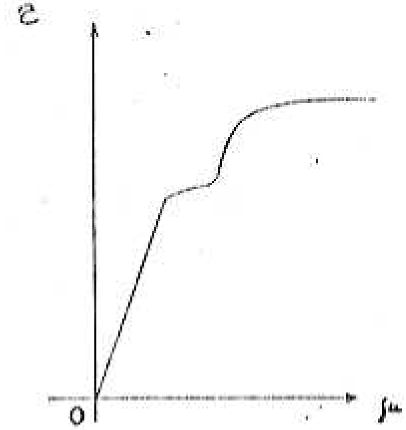
LEY DE HOOKE

(I) Ley de Hooke



TENSIONES NORMALES

$\sigma = E\,\varepsilon$



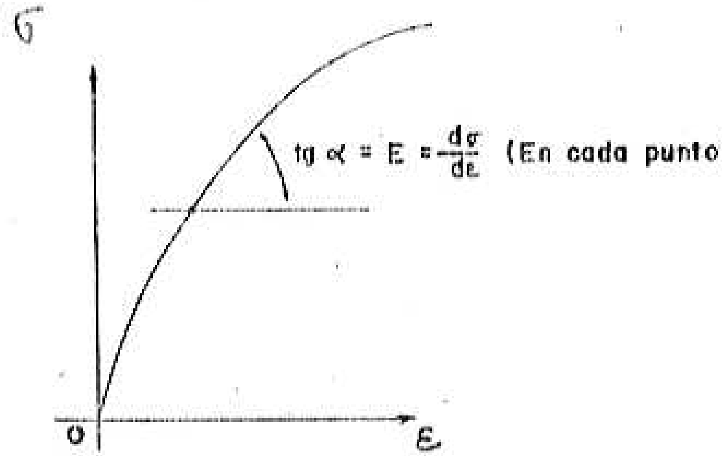
TENSIONES TANGENCIALES

$\tau = G\,\mu$

Ley de BACH : $\varepsilon = A\,\sigma^{m}$

Ley de HODKINSON : $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^{2}$

Ley de LANG : $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{a - b\sigma}$



Ley de Hooke Generalizada

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$

SI $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (PRESION HIDROSTATICA)

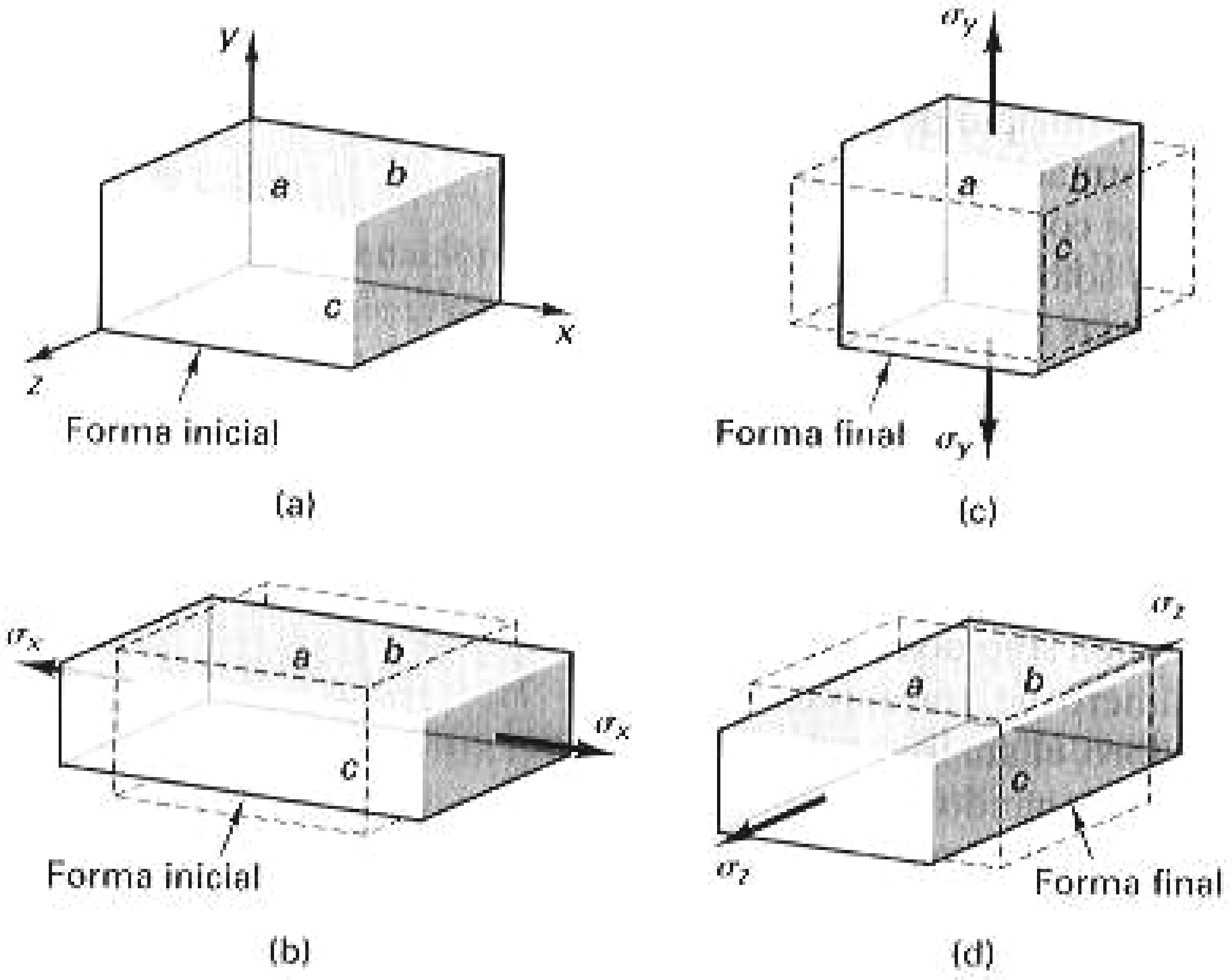
$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{3\sigma}{E} - \frac{6\mu\sigma}{E} = \frac{3}{E}(1-\mu)\sigma$$

$$\sigma = \frac{E}{3(1-2\mu)}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$ MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO

$$\frac{1}{K}$$ = FACTOR DE COMPRESIBILIDAD

$$\sigma_m = \varepsilon_v K \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$



Deformaciones de un elemento causadas por esfuerzos normales actuando en las direcciones de los ejes coordenados.

Ley de Hooke Generalizada (ejes no principales)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Deformaciones Térmicas

VARIACION DE TEMPERATURA ΔT

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \, \Delta T = \varepsilon_T$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$$

ΔT AUMENTO $+$

ΔT DISMINUCION $-$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha \, \Delta t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] + \alpha \, \Delta t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha \, \Delta t$$

Ley de Hooke para materiales anisotrópos

$$\varepsilon_x = A_{11}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\sigma_z + A_{14}\tau_{xy} + A_{15}\tau_{yz} + A_{16}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_y = A_{21}\sigma_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\sigma_z + A_{24}\tau_{xy} + A_{25}\tau_{yz} + A_{26}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_z = A_{31}\sigma_x + A_{32}\sigma_y + A_{33}\sigma_z + A_{34}\tau_{xy} + A_{35}\tau_{yz} + A_{36}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{xy}/2 = A_{41}\sigma_x + A_{42}\sigma_y + A_{43}\sigma_z + A_{44}\tau_{xy} + A_{45}\tau_{yz} + A_{46}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{yz}/2 = A_{51}\sigma_x + A_{52}\sigma_y + A_{53}\sigma_z + A_{54}\tau_{xy} + A_{55}\tau_{yz} + A_{56}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{zx}/2 = A_{61}\sigma_x + A_{62}\sigma_y + A_{63}\sigma_z + A_{64}\tau_{xy} + A_{65}\tau_{yz} + A_{66}\tau_{zx}$$

La ley de Hooke generalizada es función lineal homogénea de las seis deformaciones (lineales y angulares).

"Existiendo una función lineal de deformaciones, son iguales los coeficientes de cada pareja, que llevan los mismos subíndices cambiados de orden respecto al guión que los separa por la propiedad de aquellas funciones de ser iguales sus derivadas cruzadas (Por ejemplo $A_{12} = A_{21}$); y el número de coeficientes se reduce de 36 a 21".

En los materiales ortotrópicos, es decir que tienen propiedades diferentes según tres direcciones ortogonales (como por ejemplo la madera) el número de constantes independientes se reduce a nueve.

En los materiales isotrópicos el número de constantes independientes se reduce a tres ya que se puede demostrar que: $A_{11} = A_{22} = A_{33}$; $A_{12} = A_{13} = A_{23}$; $A_{44} = A_{55} = A_{66}$; y además $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, $A_{23} = A_{32}$.

$$A_{11} = 1/E$$

$$A_{12} = -\mu/E$$

$$A_{14} = 1/(2G)$$

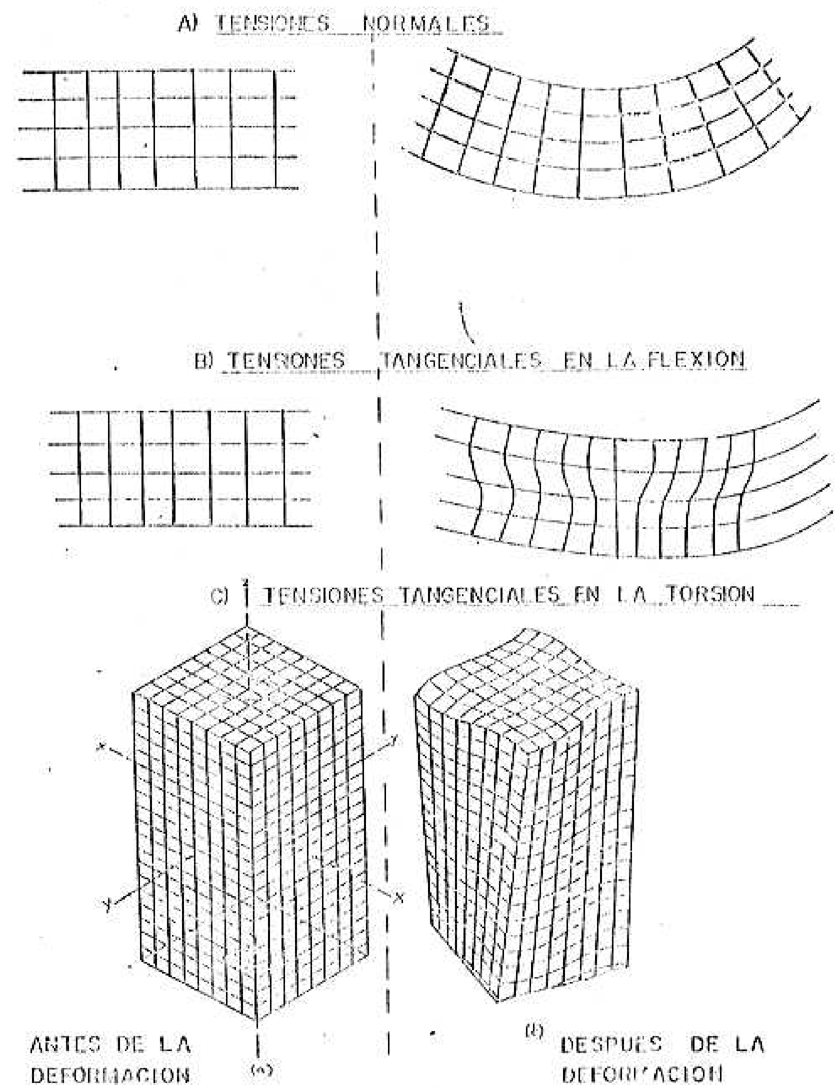
HIPOTESIS DE NAVIER-BERNOULLI

En el transcurso de la deformación, la sección recta de una pieza permanece:

-Plana

-Idéntica a si misma

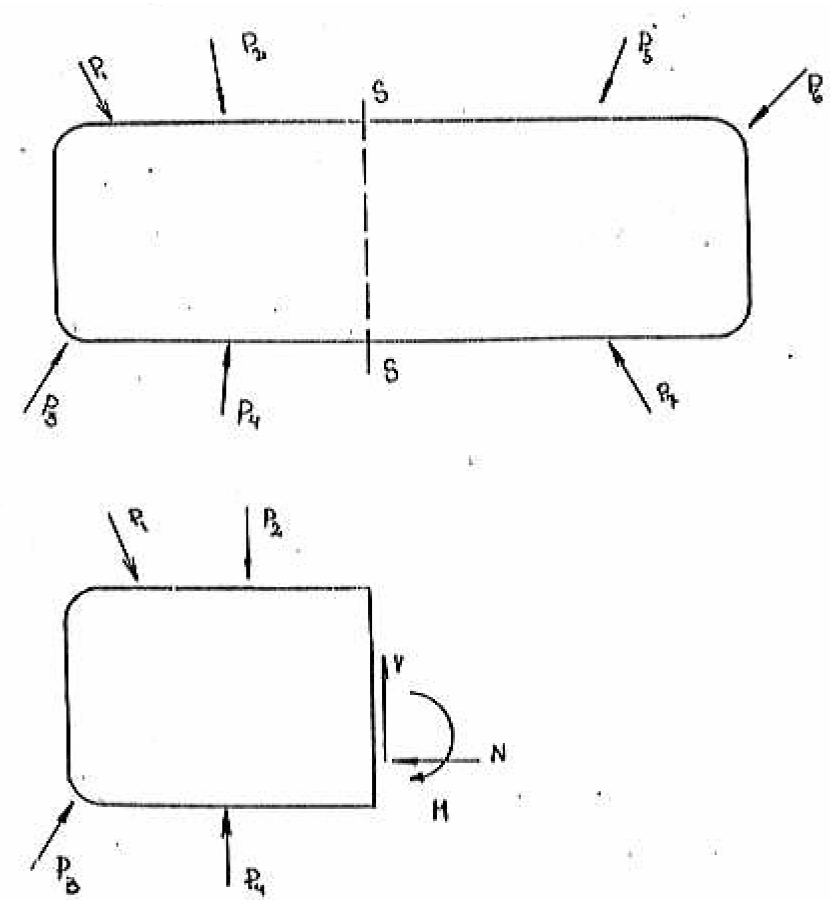
-Normal a la fibra media deformada



CONDICIÓN DE APLICACIÓN DE LAS LEYES DE HOOKE Y DE NAVIER

- Forma
  - Cuerpo en forma de barra
  - Dimensiones de la sección recta del mismo orden de magnitud y pequeñas con respecto a la longitud – 1/10, 1/15
  - Variación de la sección lenta, contínua
  - Radio de curvatura grande en relación a las dimensiones de la sección ρ>5.h
- Material
  - Continuo
  - Homogéneo
  - Isótropo
  - Elástico
- Fuerzas
  - Aplicación lenta
  - Deformaciones locales no permanentes
  - No debe impedir deformaciones transversales
  - Debe variar según funciones continuas

Método de las Secciones



$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

PARA FUERZAS COPLANARES

Procedimiento General

1er PASO: RELACIONAR LAS CARGAS CON LAS FUERZAS INTERNAS

a) EXPRESAR LAS TENSIONES EN FUNCION DE LAS FUERZAS INTERNAS ELEMENTALES

$$df_i = \sigma \, dA$$

$$dq_i = \tau \, dA$$

b) RELACIONAR LAS TENSIONES CON LAS FUEZAS INTERNAS

$$\int df_i = \int \sigma \, dA = N$$

$$\int dq_i = \int \tau \, dA = T$$

$$\int y \, dq_i = \int \sigma \, y \, dA = M_y$$

$$\int z \, dq_i = \int \sigma \, z \, dA = M_z$$

$$\int \rho \, dq_i = \int \tau \, \rho \, dA = M_T$$

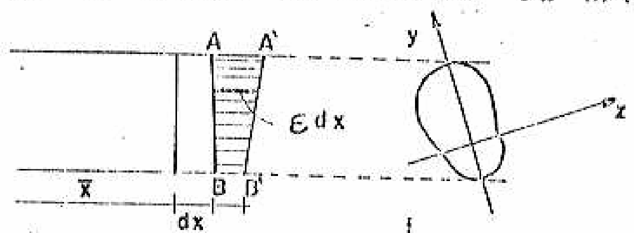
Procedimiento General

PASO 2: Determinar la ley de distribución de las Tensiones

a) EXPERIMENTALMENTE ESTUDIAR LA DISTRIBUCION DE LAS TENSIONES OBTENIENDO

$\varepsilon = f(y;z)$ $\qquad$ $\mu = f(\varphi)$

COMO SE CUMPLE LA HIPOTESIS DE NAVIER



$$\varepsilon dx = (A_1 + B_1 y + C_1 z)\,dx$$

b) HALLAR LA RELACION ENTRE TENSION - DEFORMACION

$\sigma = f(\varepsilon)$ $\qquad$ $\tau = f(\mu)$

SI SE CUMPLE LA LEY DE HOOKE

$\sigma = E\,\varepsilon$ $\qquad$ $\tau = G\mu$

c) EXPRESAR LA TENSION EN FUNCION DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO REEMPLAZANDO LA EXPRESION (a) en (b)

$$\sigma = E\,\varepsilon = E(A_1 + B_1 y + C_1 z) = A + By + Cz$$

$\sigma = f(y;z)$ .... $\tau = f(\varphi)$

d) EXPRESAR LAS FUERZAS INTERNAS EN FUNCION DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO

$\int f(y;z)\,dA = N$ $\qquad$ $\int f(\varphi)\,dA = Q$

ETC.

Procedimiento General

Paso 3: obtener las fórmulas de la Tensión en un Punto, en función de las fuerzas internas.

a) SE RESUELVEN LAS ECUACIONES DEL ULTIMO PUNTO DEL PASO ANTERIOR OBTENIENDO

$$\sigma = f(y; z; d; P_i)$$

$$\tau = f(y; z; d; P_i)$$

σ y τ EN FUNCION DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO (y; z); DE ALGUNA CARACTERISTICA GEOMETRICA DE LA SECCION (d) Y LAS FUERZAS INTERNAS (Pi)

b) TRAZAR LOS DIAGRAMAS DE VARIACION DE LAS TENSIONES.

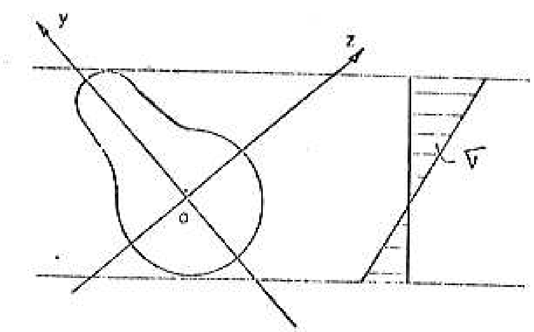


DIAGRAMA TENSIONES NORMALES

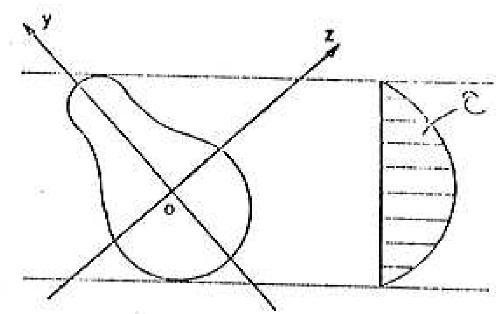


DIAGRAMA TENSIONES CORTANTES

Diferentes casos de Resistencia

- Estado de Tensión Simple:
  - N
  - Q
  - M (My, Mx)
  - Mt
- Resistencia Compuesta:
  - Combinación de dos estados simples
    - Tensiones Normales: N, M
    - Tensión Normal con Tangencial: M, T; M, Mt; N, T; N, Mt
    - Tensiones Tangenciales T, Mt
    - Tensioens normales en piezas de gran longitud
  - Combinación de tres estados simples
    - N, T, M
    - N, T, Mt
    - N, M, Mt
    - T, M, Mt
  - Combinación de cuatro estados simples
    - N, T, M, Mt

Próxima Clase: Piezas cargadas axialmente

Fin