Introducción a la optimización con algoritmos

Ejercicios

Preliminares

1. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $\nabla f(y) - \nabla f(x) = \int_0^1 \nabla^2 f(x + t(y - x))(y - x)dt$.

2. Demostrar que si $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n), F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entonces $F(y) - F(x) = \int_0^1 J(x + t(y - x))(y - x)dt$ siendo J la matriz Jacobiana de F.

3. Demostrar que si A es simétrica definida positiva y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\lambda_{min}(A) \leq \frac{x^T Ax}{\|x\|^2} \leq \lambda_{max}(A)$ siendo $\lambda_{min}(A)$ y $\lambda_{max}(A)$ el menor y el mayor autovalor de A respectivamente.

4. Norma de matrices.

   Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define $\|A\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Luego, las normas usuales de vectores $\|.\|_1, \|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$ inducen normas de matrices y se puede probar que:

   a) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   b) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   c) $\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^T A))^{1/2}$ donde λ_{max} es el mayor autovalor de la matriz.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces

   a) $Nu(A) = (R(A^T))^\perp$.

   b) $Nu(A)$ y $R(A^T)$ son conjuntos convexos y cerrados.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, m < n$ una matriz de rango m. Demostrar $A^T A$ es no singular.

Problemas sin restricciones

7. Encontrar, si existen, los maximizadores y minimizadores locales de la función $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$. Existen maximizadores y minimizadores globales?.

8. Sea $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$. Mostrar que f tiene un único punto estacionario que no es maximizador ni minimizador de f.

9. Considere la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ donde A es simétrica, $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Sea x^* minimizador local de f. Probar que x^* es minimizador global.

10. Considere el sistema no lineal

$$f_i(x) = 0, \qquad f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m.$$

   Cómo resolvería el sistema mediante un problema de minimización sin restricciones?.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), f'(0) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Probar que, para todo $x > 0, f(x) \leq f(0) + \alpha x f'(0)$.

12. Considere la función cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$ siendo A simétrica definida positiva. Muestre que si un método de direcciones de descenso con búsqueda lineal exacta es utilizado para minimizar q entonces la longitud óptima del paso, a partir de un punto x en la dirección de descenso d, es $t = -\frac{d^T \nabla q(x)}{d^t A d}$.

13. El criterio de Armijo exige un $t \in \mathbb{R}$ para el cual

$$\phi(t) = f(x + td) \leq f(x) + \alpha t d^T \nabla f(x) = \phi(0) + \sigma_1 t \phi^{'}(0)$$

con $\sigma_1 \in (0,1)$. Si f es una función cuadrática entonces ϕ es una parábola. Demuestre que si el minimizador de la parábola cumple la condición con $\sigma_1 = 1/2$.

14. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x, d \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ tales que $x + \lambda d$ cumple la condición de Armijo. Sea $0 < \mu < \lambda$. Cumple μ la condición de Armijo? Pruebelo o de un contraejemplo.

15. Considere la función $f(x,y) = x - y + 2x^2 + 2xy + y^2$.

    a) Muestre que $d = (-1, 0)$ es una dirección de descenso para f en $(0,0)$. Analizar cual es el paso oṕtimo que se puede dar en esa dirección para hacer decrecer el valor de f utilizando búsqueda exacta.

    b) Para la dirección de máximo decrecimiento en $(0,0)$ determinar el intervalo de paso máximo que se puede dar en esa dirección a partir de $(0,0)$ para hacer decrecer el valor de f utilizando la regla de Armijo con parámtero $\sigma_1 = 1/4$.

16. Considere la función $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4$.

    a) Verificar que $d = (0,1)$ es una dirección de descenso para f a partir de $(0,-2)$.

    b) Para la dirección a partir de $(0,-2)$ considerada en *a*), el valor $t = 1$ verifica la regla de Armijo con parámtero $\sigma_1 = 4/5$? Para que valores de σ_1 el valor de longitud de paso $t = 1$ verifica la regla de Armijo?

17. Considere la función $f(x,y) = (x - 2y)^2 + x^4$. Calcular la dirección de Newton en el punto $(2,1)$. Cumple el valor $t = 1$ la regla de Armijo con parámtero $\sigma_1 = 1/5$?

18. En el proceso de minimizar una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, el iterado x_k se obtuvo haciendo una búsqueda lineal a lo largo de la dirección $d_{k-1} \neq 0$. Determinar una dirección d_k ortogonal a d_{k-1}, de descenso a partir de x_k que sea una combinación lineal de d_{k-1} y $-\nabla f(x_k)$. ($d_k = -\nabla f(x_k) + \beta d_{k-1}$ con β tal que $d_k^T d_{k-1} = 0$)

19. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Para $k \in \mathbb{N}$ definimos $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$ donde $\lambda_k \geq \bar{\lambda} > 0$ para todo $k \geq 0$. Suponiendo que $\{x_k\}$ converge a x^*, demostrar que $\nabla f(x^*) = 0$.

20. Considere el siguiente método:

    - Dado x_k. Calcular d_k como se indica a continuación.
    - Hacer $t = 1$.

        Si $f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \frac{1}{2} t d_k^T \nabla f(x_k)$ (*) hacer $x_{k+1} = x_k + td_k$,
        Sino, reemplazar t por $t/2$ hasta que se verifique (*)

    Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy, x_0 = (2,0)$

    a) Dibuje algunas curvas de nivel de f.

b) Hacer dos iteraciones del método utilizando la dirección de Cauchy. Dibuje los iterados obtenidos en el plano en el cual estan las curvas de nivel de f. Que observa?

c) Resuelva el problema mediante el uso de la dirección de Newton. Que observa? Porque?

Problemas con restricciones de Igualdad

21. Listar los puntos KKT de la función $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2$ sobre la restricción $h(x) = 0$ en los siguientes casos;

    a) $h(x) = x_1 - 1$,

    b) $h(x) = x_1x_2 - 1$,

22. Resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2 + y^2 + 3xy + 6x + 19y \\ \text{s.a} & 3y + x = 5. \end{array}$$

23. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & a_i^T x - b_i = 0, i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

    - Mostrar que para cualquier punto factible x, $T^{lin}(x) = T(x)$.
    - Demostrar que la regularidad no es necesaria para demostrar la existencia de multiplicadores de Lagrange en un minimizador local.

24. Demostrar que si x^* es un minimizador local regular entonces los multiplicadores de Lagrange son únicos.

25. Probar que si x^* es un minimizador local de f sujeto a $h(x) = 0$ entonces existen escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ no todos nulos al mismo tiempo tales que

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0.$$

26. Construir un ejemplo donde un punto cumpla las condiciones necesarias de primer y segundo orden pero que no sea minimizador local del problema.

27. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0. \end{array}$$

    Sea x^* un minimizador local regular del problema tal que $\nabla f(x^*) = 0$. Calcule los multiplicadores de Lagrange. Que tipo de solución es x^*?

28. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f, g \in \mathcal{C}^2$. Sea x^* tal que $h(x^*) = 0, \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*) > 0$. Esto implica que x^* es un minimizador local de f sujeto a $h(x) = 0$? Demuestrelo o de un contraejemplo.

29. Construir un ejemplo donde la solución sea un punto no regular pero que cumple las condiciones de Lagrange.

30. Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 2. \end{array}$$

    Encuentre un punto que cumpla las condiciones KKT y verifique que es el minimizador del problema. Resolver el mismo problema usando como función objetivo la función $x_1^3 + x_2^3$.

31. Resolver los siguientes problemas. En todos los casos analizar si los puntos factibles cumplen alguna condición de calidad.

   a) $$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & (x_1 - 1)^3 = x_2^2 \end{array}$$
   Se cumplen las condiciones KKT en la solución?

   b) $$\begin{array}{ll} \text{Min} & \frac{x_1^3}{3} + x_2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$
   Es necesario analizar las condiciones de segundo orden para encontrar la solución?

32. Considere el problema
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

   a) Usando las condiciones KKT, encontrar una solución del problema. Interpretar las condiciones KKT geometricamente en x^*. Como son las curvas de nivel de f?
   b) Analizar si se verifican las condiciones de segundo orden.
   c) Tiene el problema una única solución?

Problemas con restricciones de desigualdad

33. Dado el problema
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_2 \geq x_1^2 \end{array}$$
Mostrar que en el óptimo se cumplen las condiciones KKT.

34. Demostrar que si x^* es un minimizador local de f sujeto a $g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, p$ y $A(x^*)$ es el conjunto de restricciones activas entonces x^* es un minimizador local del siguiente problema con restricciones de igualdad:
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) = 0, i \in A(x^*). \end{array}$$

35. Considere las siguientes restricciones:
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0.$$
Pruebe que $(1, 0)$ es factible pero no es regular.

Defina una función objetivo para la cual $(1, 0)$ sea la solución y se verifiquen las condiciones KKT.

36. Considere el problema
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0. \end{array}$$
Suponga que $\tilde{x}$ es un minimizador regular del problema. De ejemplos de problemas donde se cumple lo siguiente:

   a) $g_1(\tilde{x}) = 0, g_2(\tilde{x}) = 0$;
   b) $g_1(\tilde{x}) < 0, g_2(\tilde{x}) = 0$;
   c) $g_1(\tilde{x}) < 0, g_2(\tilde{x}) < 0$; en este caso, que tipo de solución es $\tilde{x}$?

d) $g_1(\tilde{x}) = 0, g_2(\tilde{x}) = 0$ y uno de los multiplicadores es cero. Que implica esto?

37. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Considere los problemas:

$$(P) \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & g(x) \leq 0. \end{array} \qquad (Q) \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0. \end{array}$$

Muestre como transformar (P) en (Q) y viceversa.

38. Como en el caso de restricciones de igualdad, demostrar que si los gradientes $\nabla g_i(x^*), i \in A(x^*)$ son linealmente independientes entonces $T(x^*) = T^{lin}(x^*)$.

39. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 \\ \text{s.a} & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1 \\ & (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \leq 1 \end{array}$$

Se cumplen las condiciones KKT en la solución? Observe que las condiciones KKT no son condiciones necesarias de optimalidad para problemas convexos.

40. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Mostrar que $x^* = (0,0)$ es KKT pero no cumple la condición $T(x^*) = T^{lin}(x^*)$. Esto implica que esta no es la condición de calidad más débil que existe en la literatura.

41. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

a) Escribir las condiciones KKT y verificar que estas condiciones se cumplen en el punto $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

b) Interpretar las condiciones KKT geometricamente en x^*.

c) Analizar las condiciones suficientes de segundo orden.

d) Mostrar geometricamente que x^* es el único minimizador global.

42. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 x_2 \\ \text{s.a} & x_1 \leq x_2 \end{array}$$

a) Mostrar que se cumplen las condiciones KKT en el punto $x^* = (0,0)$.

b) Analizar si se verifican las condiciones necesarias de segundo orden en el tangente $T(x^*) = \{d : \nabla g_i(x^*)^T d = 0, \forall i \in A(x^*)\} - \{0\}$.

c) Analizar si se verifican las condiciones suficientes de segundo orden.

d) Es x^* es un minimizador local?

43. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & (x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & -(x_1-2)^2 - x_2^2 \leq -4 \end{array}$$

Mostrar que $(0,0)$ es solución pero que no es regular ni se cumplen las condiciones KKT.

44. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x,y) \\ \text{s.a} & x^3 + y \leq 0 \\ & -x^4 - y \leq 0. \end{array}$$

Suponiendo que $f(x,y)$ es diferenciable y que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) > 0$, mostrar que $(0,0)$ es un punto KKT. Es $(0,0)$ un minimizador local del problema? Es $(0,0)$ un punto regular?

Convexidad

45. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$, una función convexa en $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ un conjunto convexo. Mostrar que el conjunto de los minimizadores de f es un conjunto convexo.

46. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en Ω convexo. Probar que f es convexa si y solo si

   a) $f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) \qquad \forall x, y \in \Omega.$

   b) $\nabla f(x)^T (y-x) \leq \nabla f(y)^T (y-x) \qquad \forall x, y \in \Omega.$

47. Demostrar que un punto estacionario de una función f convexa es un minimizador global.

48. Sea f dos veces diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Probar que f es convexa si y solo si $\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$.

Problemas con cotas en las variables

49. Demostrar que si x^* es un minimizador del problema con restricciones de cotas en las variables:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.a} & l \leq x \leq u \end{array} \qquad (1)$$

entonces

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0 & \text{si } x_i^* = l_i \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \leq 0 & \text{si } x_i^* = u_i \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 & \text{si } l_i < x_i^* < u_i. \end{array}$$

Mostrar geometricamente la condición.

50. Para $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$, demostrar que $(P_\Omega(x))_i = \min\{\max\{x_i, l_i\}, u_i\}$. Mostrar que x^* es KKT del problema (1) si y solo si $\mathcal{P}_\Omega(x^* - \nabla f(x^*)) - x^* = 0$.

51. Resolver los siguientes problemas, a partir del punto inicial mencionado, aplicando el método del gradiente proyectado con la siguiente búsqueda de Armijo

$$\begin{array}{l} t = 1 \\ \text{Si } \ f(x_k + t d_k) \leq f(x_k) + \frac{1}{2} t \nabla f(x_k)^T d_k \ \text{ entonces } \ x_{k+1} = x_k + t d_k \\ \text{Si no, reemplazar } \ t \ \text{ por } \ t/2 \ \text{ y repetir.} \end{array}$$

a) $\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 2. \end{array}$ $x_0 = (3,2)$

b) $\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 2. \end{array}$ $x_0 = (3,1)$

c) $\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 1 \leq x_2 \leq 3. \end{array}$ $x_0 = (4,3)$

Métodos de penalidad, barrera y Lagrangiano aumentado

52. Mostrar que las funciones barrera logaritmica e inversa son convexas si cada $g_i(x)$ es convexa.

53. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -30x_1 + 3x_1^2 - 8x_2 + 2x_2^2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{array}$$

Calcular la solución mediante la aplicación del método de barrera logaritmica. Calcular el multiplicador de Lagrange asociado.

54. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1^2 + 9x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \geq 4. \end{array}$$

Mostrar que si se utiliza el método de barrera inversa, entonces $(x_1^k, x_2^k) \to x^*$ cuando $\mu_k \to 0$.

55. Mostrar que $P(x) = \|g(x)_+\|_\infty$ es una función de penalidad donde $g_i(x)_+ = \text{máx}\{0, g_i(x)\}$.

56. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 6, x_1 \geq 0. \end{array}$$

Mostrar que si se utiliza el método de penalidad con la función de penalidad cuadrática, entonces $(x_1^k, x_2^k) \to x^*$ cuando $\rho_k \to 0$.

57. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 1. \end{array}$$

   a) Mostrar que si se utiliza el método de penalidad cuadrática, entonces la solución se alcanza en el límite.

   b) Mostrar que existe ρ para el cual x^* es minimizador local de la función de penalidad exacta l_1.

58. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 1/2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2 \\ \text{s.a} & x_2 = 0. \end{array}$$

   a) Mostrar que $(0, 0)$ es solución pero no es minimizador local de la función de Lagrange $l(x, \lambda^*)$.

   b) Mostrar que existe $\bar{\rho}$ para el cual $(0, 0)$ es minimizador de la función Lagrangiana aumentada $L(x, \lambda^*, \rho)$ para todo $\rho \geq \bar{\rho}$. Cuanto vale $\bar{\rho}$?

   c) Hacer 3 iteraciones el método de Lagrangiano aumentado comenzando con $x_0 = (0, 1), \rho_0 = 1, \lambda_0 = 0$. Demostrar que $\lambda_{k+1} - \lambda^* = \dfrac{\lambda_k - \lambda^*}{1 - \rho_k}$. Hay convergencia?

59. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 = 0. \end{array}$$

   a) Calcule la solución (x^*, λ^*).

   b) Existe $\bar{\rho} > 0$ para el cual x^* es minimizador de la función Lagrangiana aumentada $L(x, \lambda^*, \rho)$ para todo $\rho \geq \bar{\rho}$? Si existe, calcularlo.

   c) Hacer 3 iteraciones el método de Lagrangiano aumentado comenzando con $x_0 = (0, 0), \rho_0 = 1, \lambda_0 = 0$. Hay convergencia?