ALGEBRAIC GEOMETRY – PARAGUAY

Problema 1. *Encuentren la forma escalón reducida de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. *Suponemos que dos matrices, A y B, tienen formas escalón reducidas diferentes.*

a) Podemos concluir que A y B tienen espacios de filas diferentes? Si la respuesta es NO entonces den un ejemplo. Si la respuesta es SÍ entonces expliquen por qué.

b) Podemos concluir que A and B tienen espacios de columnas diferentes? Si la respuesta es NO entonces den un ejemplo. Si la respuesta es SÍ entonces expliquen por qué.

Problema 3. *Sea $H_{\leq 2}(S)$ el número de condiciones impuestas por puntos distinctos $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ al espacio vectorial $R_{\leq 2}$.*

a) Sea $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (a,b)\}$. Demuestren que $H_{\leq 2}(S) = 4$.

b) Sea $S = \{(0,0), (a,0), (b,0), (c,0)\}$. Demuestren que $H_{\leq 2}(S) \neq 4$.

c) Sea S cuatro puntos. Suponen que no es cierto que todos los cuatro estén situados en una recta. Demuestren que hay una transformación afín que mapa los cuatro puntos a $\{(0,0), (1,0), (0,1), (a,b)\}$.

d) Sea S un conjunto de cuatro puntos. Suponemos que todos los cuatro están situados en una recta. Demuestren que hay una transformación afín que mapa los cuatro puntos a $\{(0,0), (a,0), (b,0), (c,0)\}$.

e) Concluyen que $H_{\leq 2}(S) \neq 4$ si y solamente si no hay una recta que contiene todos los cuatro puntos de S.

Problema 4. *a) Demuestren que el número de monomios homogeneos de grado d en las variables $x_0, \ldots, x_n$ es igual al número de monomios de grado $\leq d$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$. (Noten que en el primer caso hay la variable x_0 que no hay en el segundo.)*

b) Cual es la dimensión de R_d si $R = K[x_1, \ldots, x_n]$? Acuérdense que la dimensión es el número de elementos en una base, y en este caso una base existe que consiste en monomios, así que tienen que contar monomios.

Problema 5. *Encuentren un polinomio de grado 2, $f \in \mathbb{R}[x]$, tal que*

$$f(1) = \pi, f(2) = e^2, f(3) = \log(2).$$

Problema 6. *Encuentren un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que*

$$f(0, 0) = f(1, 2) = f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = f_{xy}(1, 2) = 0.$$

Problema 7. *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Sea I el intervalo $I = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1\}$. Por cada de los siguientes, determinen si el conjunto es una variedad algebraica. Si la respuesta es SI entonces den un conjunto de ecuaciones que definen esa variedad. Si la respuesta es NO entonces encuentren la clausura Zariski del conjunto.*

a) Es $\mathbb{Z}$ una variedad algebraica en $\mathbb{R}^1$?

b) Es $\mathbb{Z}$ una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

c) Es I una variedad algebraica en $\mathbb{R}^1$?

d) Es el eje x una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

e) La unión del eje x y el eje y es una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

f) La unión del eje x, el eje y, y el eje z es una variedad algebraica en $\mathbb{R}^3$?

g) Sea

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{la parte imaginaria de } z \text{ es cero}\}.$$

Es D una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

h) Es el círculo de radio 1 una variedad algebraica en $\mathbb{R}^2$?

i) Es el disco cerrado de radio 1 una variedad en $\mathbb{R}^2$.

j) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Es G una variedad algebraica en $\mathbb{C}^1$?

Problema 8. *Cuáles son las variedades algebraicas en $\mathbb{R}^1$?*

Problema 9. *Cuáles son las variedades algebraicas en $\mathbb{C}^1$?*

Problema 10. *Describan cada una de las siguientes variedades algebraicas en $\mathbb{R}^3$.*

a) $V(xyz)$

b) $V(xy, xz, yz)$

c) $V(x, y, z)$

d) $V(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$

e) $V(x^2 + y^2 + z^2)$

f) $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Problema 11. *Describan cada una de las siguientes variedades algebraicas en* $\mathbb{R}^2$*.*

a) $V((x^2 + y^2 - 1)(x - y))$

b) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y)$

c) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y + 1)$

d) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y + 3)$

Problema 12. *Sea* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$*.*

a) Encuentren la homogenización, $\bar{f}$*, de* f *usando la variable nueva* z*.*

b) Si $K = \mathbb{R}$*, en cuantos puntos se encuentran la curva* $V(\bar{f})$ *y la recta del infinito? (Recuerden que* $[0, 0, 0]$ *NO es un punto del plano proyectivo, y que la recta del infinito está definida por la ecuación* $z = 0$*.)*

c) Si $K = \mathbb{C}$*, en cuantos puntos se encuentran la curva* $V(\bar{f})$ *y la recta del infinito?*

Problema 13. *Ahora trabajemos en* $\mathbb{P}^3$*. Si la respuesta es NO, entonces expliquen. Si es SÍ, den un ejemplo.*

a) Existen dos rectas V_1, V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*

b) Existen dos planos V_1, V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*

c) Existen una recta V_1 *y un plano* V_2 *en* $\mathbb{P}^3$ *que no se encuentran?*

Problema 14. *Sean* I *y* J *ideales en* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *tal que* $I \subset J$*. Demuestren que* $V(I) \supset V(J)$*.*

Problema 15. *Sean W_1 y W_2 conjuntos en K^n tal que $W_1 \subset W_2$. Demuestren que $I(W_1) \supset I(W_2)$.*

Problema 16. *Sea*

$$V = V(y - x^2, z - x^3) = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Demuestren que $\langle y - x^2, z - x^3\rangle \subset I(V)$ (recuerden que $\langle y - x^2, z - x^3\rangle$ es el ideal generado por $y - x^2$ y $z - x^3$).

b) Combinando con a), si uno quisiera demonstrar que $I(V) = \langle y-x^2, z-x^3\rangle$, uno eligiría un $f \in I(V)$ arbitrario, y demonstrar qué? (No digan que $f \in \langle y-x^2, z-x^3\rangle$. Quiero saber qué quiere decir eso. Que existen.....)

Problema 17. *Si I y J son ideales en $K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $I \neq J$ entonces necesariamente es cierto o no que $V(I) \neq V(J)$? Si es cierto, den una demonstración. Si es falso, den un contraejemplo (eligiendo el valor de n que más les sirve).*

Problema 18. *Si W_1 y W_2 son conjuntos en K^n tal que $W_1 \neq W_2$ entonces necesariamente es cierto o no que $I(W_1) \neq I(W_2)$? Si es cierto, den una demonstración. Si es falso, den un contraejemplo.*

Problema 19. *Si W_1 y W_2 son variedades en K^n tal que $W_1 \neq W_2$ entonces necesariamente es cierto o no que $I(W_1) \neq I(W_2)$? Si es cierto, den una demonstración. Si es falso, den un contraejemplo.*

Problema 20. *Si I y J son ideales en $K[x_1, \dots, x_n]$ entonces $I + J$ es un ideal en $K[x_1, \dots, x_n]$.*

Problema 21. *Sea $V = V(x^2)$. Demuestren que $I(V) = \langle x\rangle$.*

Problema 22. *Sean I_1, I_2 ideales.*

(1) *Demuestren que $I_1 \cap I_2$ es un ideal.*

(2) *Demuestren que $I_1 + I_2$ es un ideal.*

Problema 23. *Si J es un ideal entonces demuestren que $I(V(J)) \supset J$.*

Problema 24. *Si I es un ideal en $R = K[x_1, \dots, x_n]$, y si $f \in \sqrt{I}$ y $g \in R$ entonces demuestren que $fg \in \sqrt{I}$.*

Problema 25. (1) *Usen el algoritmo euclidiano para encontrar* $MCD(13, 8)$.

(2) *Usen el algoritmo euclidiano para escribir*

$$MCD(13, 8) = a \cdot 13 + b \cdot 8.$$

Problema 26. *Encuentren* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\langle 36, 100, 26 \rangle = \langle n \rangle$ *en* $\mathbb{Z}$.

Problema 27. *Sea* $I = \langle 100, 36 \rangle \subset \mathbb{Z}$. *Encuentren* $\sqrt{I}$.

Problema 28. *Es cierto que* $t^3 + t^2 - 2 \in \langle t^3 - 1, t^5 - 1 \rangle$*?*

Sugerencia:

1. *Encuentren un polinomio* $f \in \mathbb{R}[t]$ *tal que* $\langle t^3 - 1, t^5 - 1 \rangle = \langle f \rangle$.
2. *Determinan si* $t^3 + t^2 - 2 \in \langle f \rangle$.

Problema 29. *Sea* $I = \langle t^3 - 1, t^5 - 1 \rangle \subset \mathbb{R}[t]$. *Encuentren* $\sqrt{I}$.

Problema 30. *Sea* $T \subset \mathbb{R}[x, y]$, *definido por*

$$T = \{ax + by \mid a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Es T *un ideal? Si es, expliquen por qué. Si no, expliquen por qué no, y describen* $\langle T \rangle$ *(el ideal generado por* T*).*

Problema 31. *Sea* $I = \langle 3000, 5000 \rangle \subset \mathbb{Z}$. *Encuentren* $\sqrt{I}$.

Problema 32. (1) *Sea* $I = \langle (x^2 + 1)(x^2 + 4) \rangle \subset \mathbb{R}[x]$. *Encuentren* $I(V(I))$.

(2) *Sea* $I = \langle (x^2 + 1)(x^2 + 4) \rangle \subset \mathbb{C}[x]$. *Encuentren* $I(V(I))$.

Problema 33. *Sea* V *la "twisted cubic en* $\mathbb{R}^3$*". Acuerdense que*

$$V = V(z - x^3, y - x^2).$$

(1) *Sea* H *el plano definido por* $x = 0$. *En cuantos puntos se encuentran* V *y* H*?*

(2) *Sea* H *el plano definido por* $x - 1 = 0$. *En cuantos puntos se encuentran* V *y* H*?*

(3) *Sea H el plano definido por $y - 1 = 0$. En cuantos puntos se encuentran V y H?*

(4) *Sea H el plano definido por $z - 1 = 0$. En cuantos puntos se encuentran V y H?*

(5) *Sea H el plano definido por $x - z = 0$. En cuantos puntos se encuentran V y H?*

Problema 34. *Con "cónica" vamos a entender una curva del plano $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio de grado 2. Sean $P_1, \ldots, P_5$ cualquier conjunto de 5 puntos. Por qué es cierto que necesariamente existe una cónica que contiene todos los 5 puntos?*